

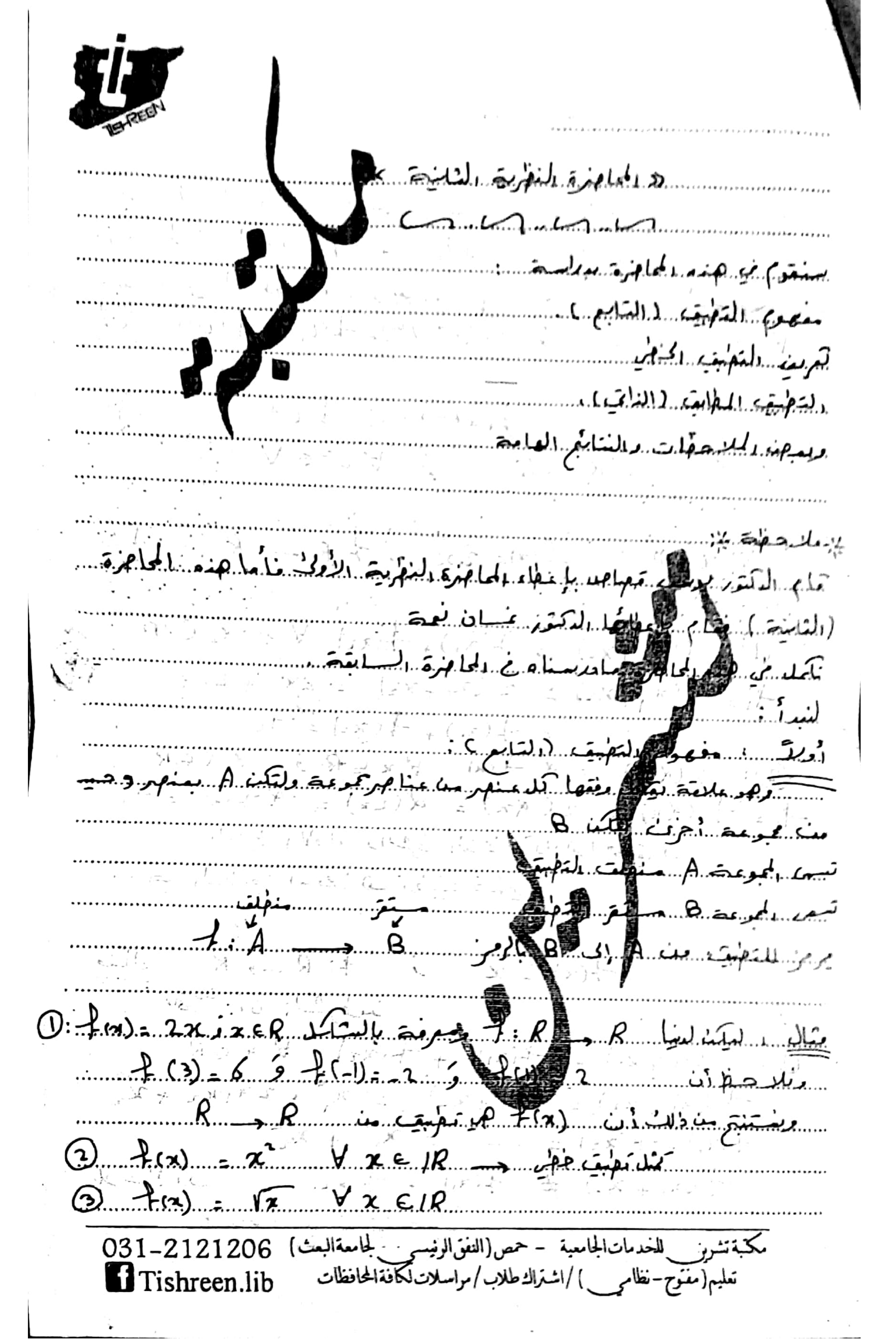
الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

جبر خطي (٢)

نظري

المحاضرة الثانية

السنة الأولى - ف٢



* المحاضرة النظرية الثانية *

سنقوم في هذه المحاضرة بدراسة :

مفهوم التطبيق (التابع)

تعريف التطبيق الخطي

التطبيق المطابق (الذاتي)

وبعض الملاحظات والنتائج الهامة

* ملاحظة *:

قام الدكتور [illegible] بإعطاء المحاضرة النظرية الأولى فأما هذه المحاضرة (الثانية) فقام بإعطائها الدكتور غسان نعمة

نكمل في [illegible] المحاضرة ما درسناه في المحاضرة السابقة.

لنبدأ :

أولاً : مفهوم التطبيق (التابع) :

وجود علاقة ترفق وفقها كل عنصر من عناصر مجموعة ولتكن A بعنصر وحيد من مجموعة أخرى ولتكن B

تسمى المجموعة A منطلق التطبيق

تسمى المجموعة B مستقر التطبيق

يرمز للتطبيق من A إلى B بالرمز

منطلق ↓ ، مستقر ↓

$$f : A \longrightarrow B$$

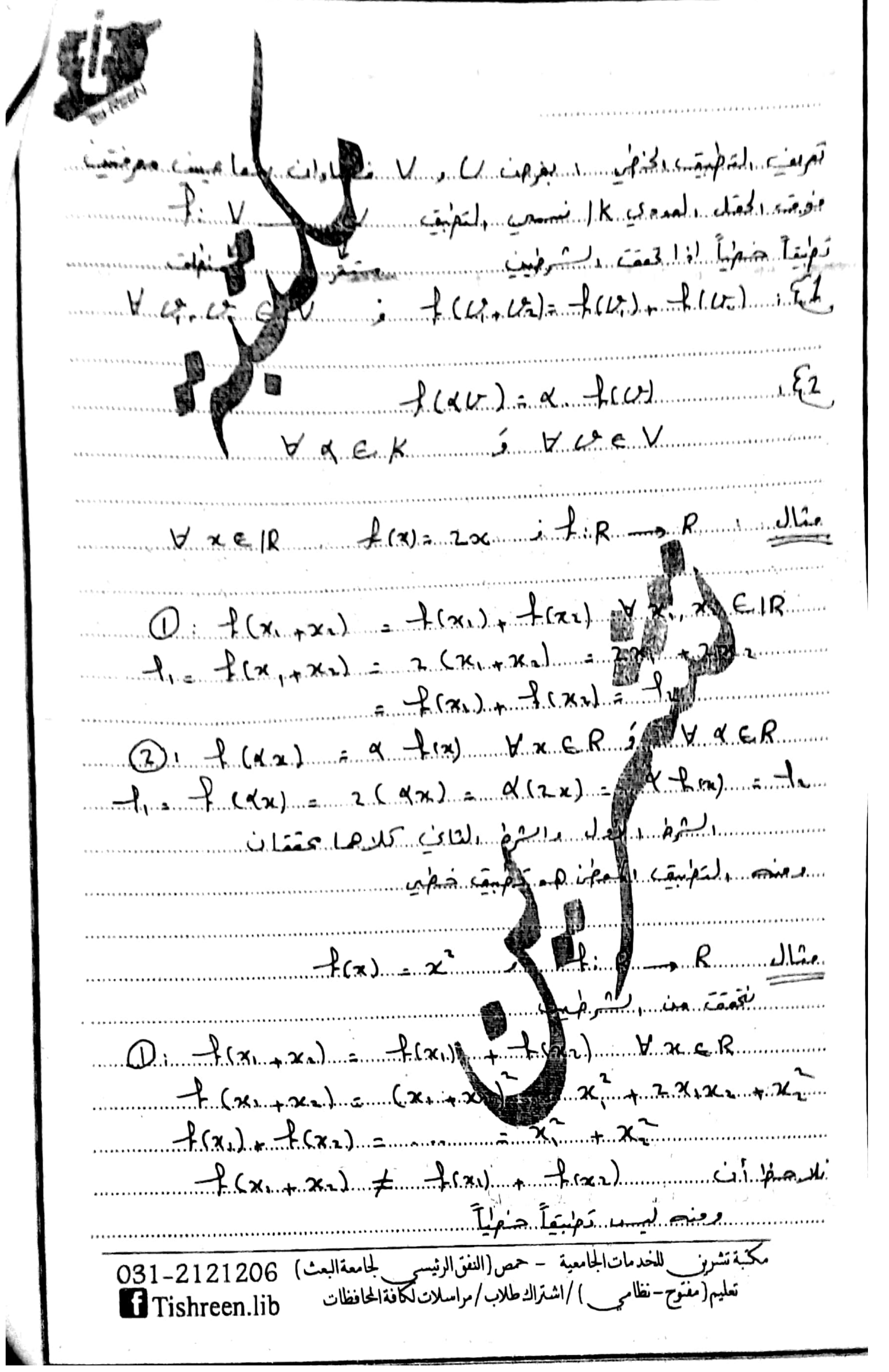
مثال : لتكن لدينا $f : R \to R$ معرفة بالشكل $f(x) = 2x \; ; \; x \in R$ (1)

ونلاحظ أن $f(1) = 2$ و $f(-1) = -2$ و $f(3) = 6$

ونستنتج من ذلك أن $f(x)$ هو تطبيق من $R \to R$

(2) $f(x) = x^2 \quad \forall x \in IR$ ⟵ تمثل تطبيق خطي

(3) $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in IR$



تعريف التطبيق الخطي : بفرض U و V فضاءان شعاعيان معرفين فوق الحقل العددي K نسمي التطبيق $f: U \to V$ تطبيقاً خطياً إذا حقق الشرطين

ش1 : $f(U_1+U_2) = f(U_1)+f(U_2)$; $\forall U_1, U_2 \in V$

ش2 : $f(\alpha U) = \alpha \, f(U)$

$\forall \alpha \in K$ و $\forall U \in V$

<u>مثال</u> : $f: R \to R$; $f(x) = 2x$ $\forall x \in IR$

① : $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in IR$

$f_1 = f(x_1+x_2) = 2(x_1+x_2) = 2x_1+2x_2$

$= f(x_1)+f(x_2) = f_2$

② : $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $\forall x \in R$ و $\forall \alpha \in R$

$f_1 = f(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha f(x) = f_2$

الشرط الأول والشرط الثاني كلاهما محققان

ومنه التطبيق المعطى هو تطبيق خطي

<u>مثال</u> : $f: R \to R$, $f(x) = x^2$

نتحقق من الشرطين

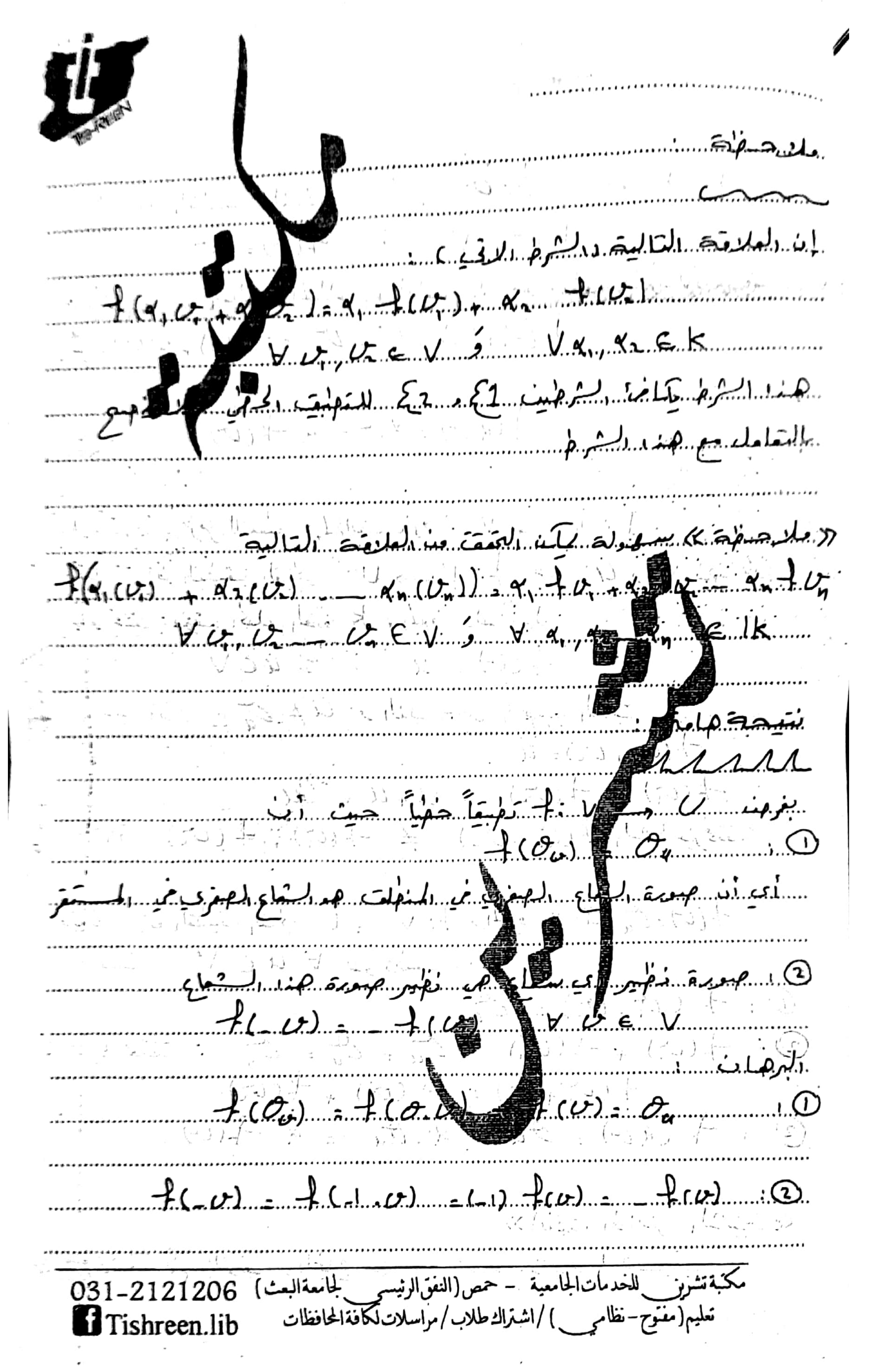
① : $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ $\forall x \in R$

$f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$f(x_1)+f(x_2) = \dots = x_1^2 + x_2^2$

نلاحظ أن $f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2)$

ومنه ليس تطبيقاً خطياً



ملاحظة:

إن العلاقة التالية (الشرط الآتي):

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad \text{و} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$$

هذا الشرط يكافئ الشرطين E1 و E2 للتطبيق الخطي ويمكن التعامل مع هذا الشرط

«ملاحظة» بسهولة يمكن التحقق من العلاقة التالية

$$f(\alpha_1 (v_1) + \alpha_2 (v_2) \ldots \alpha_n (v_n)) = \alpha_1 f v_1 + \alpha_2 f v_2 \ldots \alpha_n f v_n$$

$$\forall v_1, v_2 \ldots v_n \in V \quad \text{و} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in K$$

نتيجة هامة:

بفرض $f: V \to U$ تطبيقاً خطياً حيث أن:

① $f(O_V) = O_U$

أي أن صورة الشعاع الصفري في المنطلق هو الشعاع الصفري في المستقر

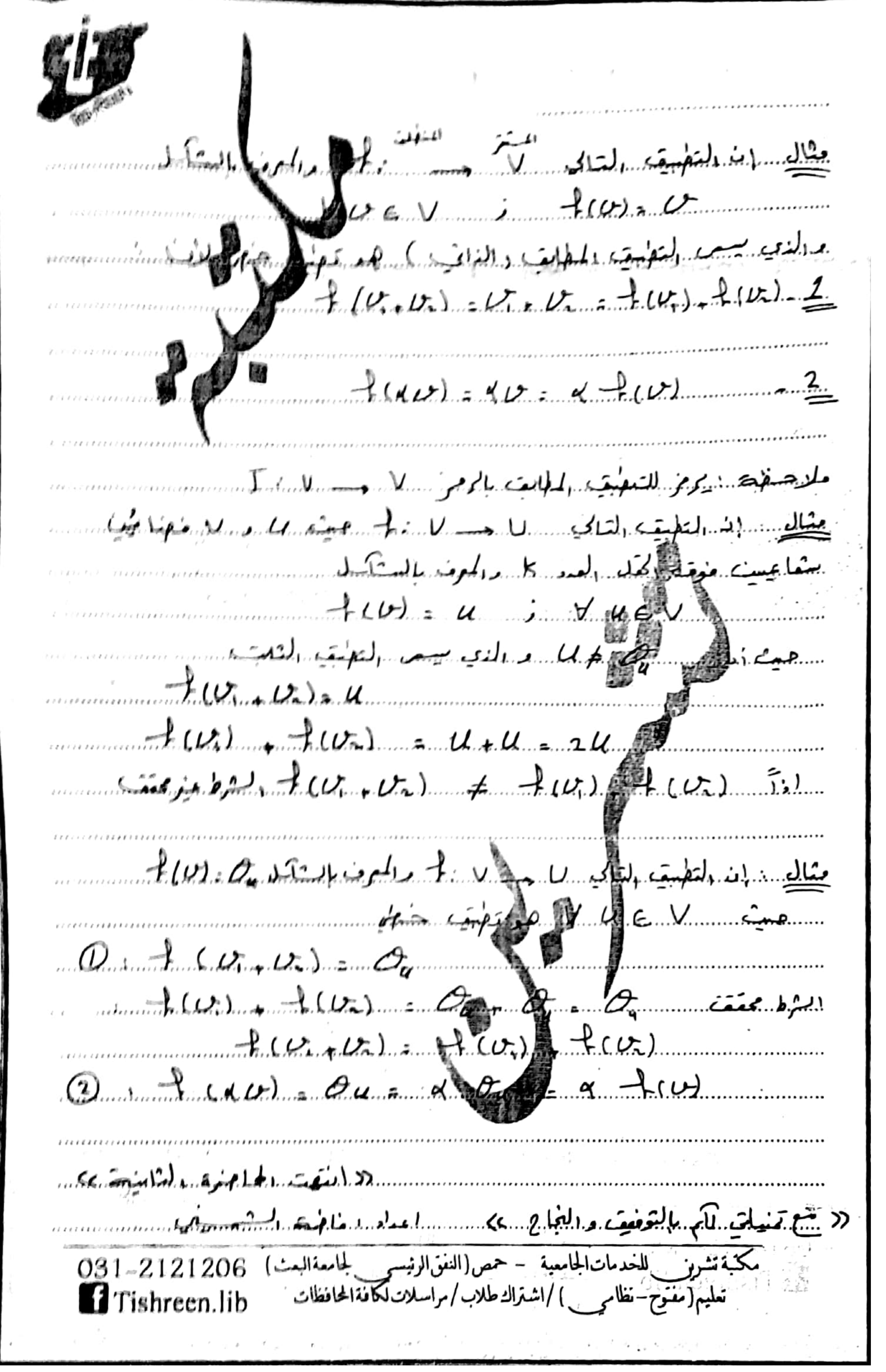
② صورة نظير أي شعاع هي نظير صورة هذا الشعاع

$$f(-v) = -f(v) \quad \forall v \in V$$

البرهان:

① $f(O_V) = f(O \cdot v) = O f(v) = O_U$

② $f(-v) = f(-1 \cdot v) = (-1) f(v) = -f(v)$



مثال: إن التطبيق التالي $V \to V$ والمعرف بالشكل

$f(v) = v \; ; \; v \in V$

والذي يسمى (التطبيق المطابق والذاتي) هو تطبيق خطي

1- $f(v_1+v_2) = v_1+v_2 = f(v_1)+f(v_2)$

2- $f(\alpha v) = \alpha v = \alpha f(v)$

ملاحظة: يرمز للتطبيق المطابق بالرمز $I: V \to V$

مثال: إن التطبيق التالي $f: V \to U$ حيث U و V فضاءين شعاعيين منتهيين لحقل العدد K والمعرف بالشكل

$f(v) = u \; ; \; \forall v \in V$

حيث $u \neq 0_u$ والذي يسمى التطبيق الثابت

$f(v_1+v_2) = u$

$f(v_1)+f(v_2) = u+u = 2u$

إذاً $f(v_1+v_2) \neq f(v_1)+f(v_2)$ الشرط غير محقق

مثال: إن التطبيق التالي $f: V \to U$ والمعرف بالشكل $f(v) = 0_u$ حيث $\forall v \in V$ هو تطبيق خطي

① : $f(v_1+v_2) = 0_u$

$f(v_1)+f(v_2) = 0_u + 0_u = 0_u$ الشرط محقق

$f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$

② : $f(\alpha v) = 0_u = \alpha 0_u = \alpha f(v)$

« انتهت المحاضرة الثانية »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح » إعداد: فاطمة الشمري (?)